

EXISTENCE DE POINTS FIXES ENLACÉS À UNE ORBITE PÉRIODIQUE D'UN HOMÉOMORPHISME DU PLAN

CHRISTIAN BONATTI AND BORIS KOLEV

RÉSUMÉ. Soit f un homéomorphisme du plan qui préserve l'orientation et tel que $f - Id$ soit une contraction. Sous ces hypothèses, on établit l'existence, pour toute orbite périodique \mathcal{O} , d'un point fixe ayant un nombre d'enlacement non nul avec \mathcal{O} .

1. INTRODUCTION

Un résultat classique dû à Brouwer énonce que tout homéomorphisme du plan \mathbb{R}^2 qui préserve l'orientation et possède une orbite périodique, possède également un point fixe. Dans le même ordre d'idées, on peut montrer [4, 6] qu'un tel homéomorphisme f possède un point fixe lié à cette orbite périodique, en ce sens qu'il n'existe pas de courbe de Jordan \mathcal{C} , bordant un disque D contenant l'orbite périodique mais ne contenant pas le point fixe, et telle que $f(\mathcal{C})$ soit homotope à \mathcal{C} dans le complémentaire de l'orbite périodique et du point fixe. Une question posée par John Franks dans [1] demeure toujours sans réponse :

Étant donné un homéomorphisme $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ préservant l'orientation, existe-t-il pour toute orbite périodique de f un point fixe ayant un nombre d'enlacement non nul avec cette orbite périodique ?

On sait que la réponse à cette question est positive pour les orbites de période 2 (voir [2]) ou de période 3 [5]. D'autre part, dans une prépublication récente, Franks [3] utilise la réponse affirmative à cette question comme étant un théorème de Handel (sans référence) : on peut donc supposer que cette question est, soit résolue, soit en passe de l'être.

Nous montrons ici qu'un raisonnement très simple et très rapide permet de répondre par l'affirmative à la question de Franks pour les orbites de toutes les périodes des homéomorphismes f de \mathbb{R}^2 pour lesquels $f - Id$ vérifie un condition de Lipschitz. Plus précisément :

Théorème 1.1. *Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ un homéomorphisme qui préserve l'orientation et tel que $f - Id$ soit lipschitzienne de rapport $k \in [0, 1]$. Alors, pour toute orbite périodique $\mathcal{O} = \{x, f(x), \dots, f^{n-1}(x)\}$ de f , il existe un point fixe de f , x_0 , ayant un nombre d'enlacement non nul avec \mathcal{O} .*

Outre l'intérêt du résultat, la simplicité de la preuve met en valeur l'avantage qu'il y a à tester sur cette classe (pas trop petite) d'homéomorphismes, les conjectures concernant les homéomorphismes des surfaces.

Date: 1 Août 1991.

1991 Mathematics Subject Classification. 55M20, 54H20.

Key words and phrases. Homéomorphismes du plan, Points fixes.

2. NOMBRE D'ENLACEMENT D'UN POINT FIXE ET D'UNE ORBITE PÉRIODIQUE

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ un homéomorphisme. On note $Fix(f)$ l'ensemble de ses points fixes. Un point $x \in \mathbb{R}^2$ est périodique de période n si $f^n(x) = x$ mais $f^k(x) \neq x$ pour $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$. On note

$$\mathcal{O}(n, f) = \{x, f(x), \dots, f^{n-1}(x)\}$$

l'orbite de x sous f .

Soit $x_0 \in Fix(f)$, x un point périodique de période n et c un arc joignant x et $f(x)$ dans $\mathbb{R}^2 \setminus Fix(f)$, on note γ_c la courbe fermée obtenue en joignant bout à bout les arcs, $c, f(c), \dots, f^{n-1}(c)$.

On note $\omega(x_0, \gamma_c)$ le nombre d'enroulement de γ_c autour de x_0 c'est à dire le nombre d'intersection algébrique d'une demi-droite générique issue de x_0 avec γ_c (ce nombre est souvent appelé indice de x_0 par rapport à γ_c).

Lemme 2.1. *Soient c et c' deux arcs quelconques joignant x et $f(x)$ dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{x_0\}$. Si f préserve l'orientation, alors $\omega(x_0, \gamma_c) - \omega(x_0, \gamma_{c'}) \in n\mathbb{Z}$.*

Démonstration. On a

$$\omega(x_0, \gamma_{c'}) = \omega(x_0, \gamma_c) + \sum_{k=0}^{n-1} \omega(x_0, f^k(c^{-1}c')).$$

Or si f préserve l'orientation

$$\omega(x_0, f^k(c^{-1}c')) = \omega(x_0, c^{-1}c'),$$

d'où $\omega(x_0, \gamma_c) - \omega(x_0, \gamma_{c'}) = n\omega(x_0, c^{-1}c')$. □

On peut montrer également que la valeur de $\omega(x_0, \gamma_c) \pmod{n}$ ne dépend pas du choix du point x de \mathcal{O} choisi pour le construire.

Définition 2.2. Avec les notations ci-dessus, on note $Lk(x_0, \mathcal{O})$ l'unique entier $l \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ tel que $\omega(x_0, \gamma_c) - l \in n\mathbb{Z}$ pour un choix quelconque de c et on l'appelle le *nombre d'enlacement* (ou *linking number*) du point fixe x_0 avec l'orbite périodique \mathcal{O} .

Remarque 2.3. L'appellation « nombre d'enlacement » est justifiée par la remarque suivante : $Lk(x_0, \mathcal{O})$ est aussi le nombre d'enlacement des deux orbites fermées C_{x_0} et C_x du champ de vecteurs canonique induit dans la suspension T_f de f .

Exemple 2.4. Le point fixe de la rotation d'angle $2k\pi/n$, $k \in \{0, \dots, n-1\}$ a pour nombre d'enlacement k avec l'une quelconque de ses orbites périodiques.

3. QUELQUES PROPRIÉTÉS ÉLÉMENTAIRES D'UN HOMÉOMORPHISME f DU PLAN, TEL QUE $f - Id$ VÉRIFIE UNE CONDITION DE LIPSCHITZ

Soit $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ une application continue. Si l'ensemble

$$\{k \in [0, \infty[; \forall x, y \in \mathbb{R}^2 : \|g(x) - g(y)\| \leq k \|x - y\|\}$$

est non vide, on note $Lip(g)$ sa borne inférieure. Sinon, on pose $Lip(g) = +\infty$.

Soient x et y deux points de \mathbb{R}^2 , on note $[x, y]$ le segment de droite joignant x et y .

Lemme 3.1. *Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ un homéomorphisme tel que $Lip(f - Id) \leq 1$ et $x \in \mathbb{R}^2 \setminus Fix(f)$. Alors $Fix(f) \cap [x, f(x)] = \emptyset$.*

Démonstration. Par l'absurde, supposons qu'il existe $y \in Fix(f) \cap [x, f(x)[$. On a alors :

$$\|f(x) - x\| = \|(f(x) - x) - (f(y) - y)\| \leq Lip(f - Id) \|x - y\| < \|f(x) - x\|.$$

D'autre part $f(x) \in \mathbb{R}^2 \setminus Fix(f)$ car f est injective, ce qui conclut. \square

Lemme 3.2. *Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ un homéomorphisme tel que $Lip(f - Id) \leq 1$ et $x \in \mathbb{R}^2 \setminus Fix(f)$. Alors, $f([x, f(x)])$ et $[f(x), f^2(x)]$ sont homotopes relativement à $f(x)$, $f^2(x)$ dans $\mathbb{R}^2 \setminus Fix(f)$.*

Démonstration. Soit $F : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par :

$$F(s, t) = (1 - t)((1 - s)x + sf(x)) + tf((1 - s)x + sf(x)).$$

L'image de F est la réunion des segments de droite $[y, f(y)] (y \in [x, f(x)])$. D'après le Lemme 3.1 $y \in [x, f(x)]$ n'est pas un point fixe de f , donc $[y, f(y)] \subset \mathbb{R}^2 \setminus Fix(f)$. D'où $im F \subset \mathbb{R}^2 \setminus Fix(f)$. D'autre part, $F(s, 0) = F(0, s) = (1 - s)x + sf(x)$. On obtient donc une application du disque :

$$D = [0, 1]^2 / (s, 0) \sim (0, s) - \mathbb{R}^2 \setminus Fix(f)$$

telle que $F(\partial D) = [f(x), f^2(x)] \cup f([x, f(x)])$. On a ainsi réalisé l'homotopie. \square

Soient a, b deux vecteurs de \mathbb{R}^2 . On note $(a, b) \in [0, \pi]$ l'angle non orienté des vecteurs a et b .

Lemme 3.3. *Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ un homéomorphisme tel que $Lip(f - Id) \leq 1$ et $x \in \mathbb{R}^2 \setminus Fix(f)$. Alors pour tout $y \in [x, f(x)]$:*

$$(f(x) - x, f(y) - y) < \pi/2.$$

Démonstration. On a :

$$\|(f(x) - x) - (f(y) - y)\| \leq Lip(f - Id) \|x - y\| \leq \|f(x) - x\|,$$

et par suite : $\cos(f(x) - x, f(y) - y) \geq 0$. Si l'angle est $\pi/2$, cela implique $y = f(y)$ ce qui est impossible en vertu du Lemme 3.1. \square

4. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME

Soit $\mathcal{O} = \{x, f(x), \dots, f^{n-1}(x)\}$ l'orbite d'un point périodique de période n d'un homéomorphisme de \mathbb{R}^2 qui préserve l'orientation et tel que $Lip(f - Id) \leq 1$. Soit Γ la courbe polygonale obtenue en joignant bout à bout les segments $[x, f(x)]$, $[f(x), f^2(x)]$, \dots , $[f^{n-1}(x), x]$ (voir Figure 1) et soit $c = [x, f(x)]$.

Lemme 4.1. *Avec les notations ci-dessus, on a :*

- (1) $\Gamma \subset \mathbb{R}^2 \setminus Fix(f)$,
- (2) Pour tout $x_0 \in Fix(f)$, $\omega(x_0, \gamma_c) = \omega(x_0, \Gamma) \in \{-(n-1), \dots, n-1\}$.

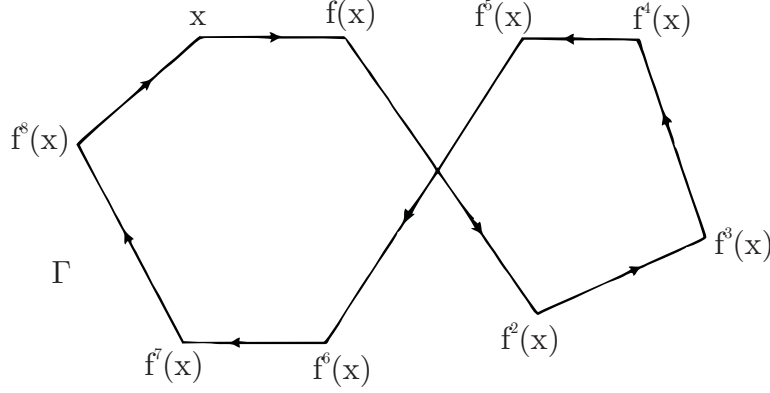


FIG. 1.

Démonstration. L'assertion (1) résulte du Lemme 3.1. En raisonnant par récurrence et en utilisant le Lemme 3.2, on établit que Γ est homotope à γ_c dans $\mathbb{R}^2 \setminus \text{Fix}(f)$, d'où l'égalité $\omega(x_0, \gamma_c) = \omega(x_0, \Gamma)$. Par ailleurs, le nombre d'enroulement de Γ par rapport à x_0 est aussi le nombre algébrique de croisements d'une demi-droite issue de x_0 avec Γ . Ce nombre est donc nécessairement inférieur à $n - 1$ en valeur absolue. \square

Soient C_1, C_2, \dots, C_r les composantes connexes bornées de $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ (remarquer qu'il en existe au moins une, sinon Γ serait réduit à un segment de droite ce qui est exclu en vertu du Lemme 3.3) et C_∞ la composante connexe non bornée. Si $C \in \{C_1, C_2, \dots, C_r\}$ on définit l'indice de C en posant :

$$\text{Ind}(f, C) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial C} d\varphi,$$

où φ désigne une détermination continue de l'angle du vecteur $f(x) - x$ avec une direction fixe et où ∂C est le bord orienté de C . Dans chaque composante d'indice non nul il existe au moins un point fixe de f . Soient S_0, \dots, S_{m-1} les sommets de ∂C et a_0, \dots, a_{m-1} ses arêtes munies de l'orientation induite par celle de Γ . En un sommet S_i , il y a deux configurations possibles quant à l'orientation des arêtes adjacentes à S_i : ou bien ces deux arêtes ont des orientations compatibles, ou bien il y a un changement d'orientation (voir Figure 2).

Le nombre total de changement d'orientation sur ∂C est un nombre pair que l'on notera $2p$.

Lemme 4.2. *Avec les notations ci-dessus, on a : $\text{Ind}(f, C) = 1 - p$.*

Démonstration. On a :

$$\int_{\partial C} d\varphi = \sum_{i=0}^{m-1} \int_{a_i} d\varphi = \sum_{i=0}^{m-1} (\varphi_i^1 - \varphi_i^0),$$

où φ_i^0 et φ_i^1 sont les valeurs respectives en S_i et S_{i+1} ($i \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$) d'une détermination continue φ_i de l'angle $f(y) - y$ ($y \in a_i$) avec la tangente orientée à a_i . Il résulte alors du Lemme 3.3 que $\varphi_i^1 - \varphi_i^0 \in [-\pi, \pi]$ (autrement

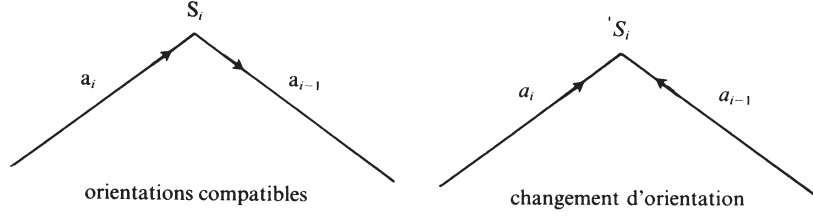


FIG. 2.

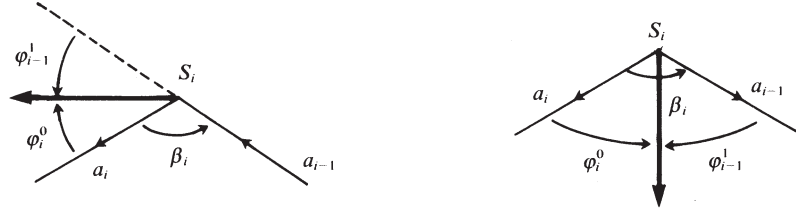


FIG. 3.

dit le vecteur $f(y) - y$ ne décrit pas de tour complet lorsque y parcourt a_i). En désignant alors par $\beta_i \in [0, \pi]$ l'angle intérieur à C en S_i , on a (voir Figure 3) :

$$\begin{aligned} \varphi_{i-1}^1 - \varphi_i^0 &= \pi - \beta_i, & \text{s'il n y a pas de changement d'orientation en } S_i, \\ \varphi_{i-1}^1 - \varphi_i^0 &= -\beta_i, & \text{s'il y a un changement d'orientation en } S_i. \end{aligned}$$

Par suite :

$$\begin{aligned} \text{Ind}(f, C) &= \frac{1}{2\pi} \left[\sum_{i=0}^{m-1} (\varphi_i^1 - \varphi_i^0) \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\sum_{i=0}^{m-1} (\varphi_{i-1}^1 - \varphi_i^0) \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\sum_{i=0}^{m-1} (\pi - \beta_i) - 2p\pi \right] \\ &= 1 - p. \end{aligned}$$

□

Nous pouvons maintenant établir le théorème. Le nombre d'enroulement $\omega(x, \Gamma)$ d'un point $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ ne dépendant que de la composante C à laquelle il appartient, on notera $\omega(C, \Gamma)$ cette valeur commune. Il nous reste donc à établir l'existence d'une composante C_i de $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ telle que :

$$(1) \quad \text{Ind}(f, C_i) > 0 \quad \text{et} \quad (2) \quad \omega(C_i, \Gamma) \neq 0.$$

Lemme 4.3. *Soit $p \in \{1, \dots, r\}$ tel que : $|\omega(C_p, \Gamma)| = \sup_i |\omega(C_i, \Gamma)|$. Alors $\text{Ind}(f, C_i) > 0$.*

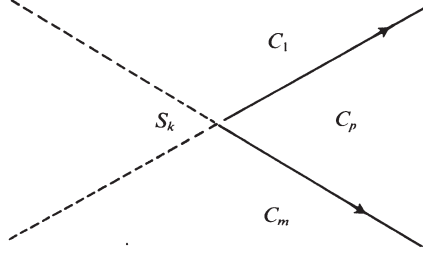


FIG. 4.

Démonstration. Remarquons d'abord que $\omega(C_\infty, \Gamma) = 0$ et que $\omega(C_i, \Gamma) \neq 0$ pour toute composante C_i adjacente à C_∞ . Il existe donc bien $p \in \{1, \dots, r\}$ tel que :

$$|\omega(C_p, \Gamma)| = \sup_i |\omega(C_i, \Gamma)| > 0.$$

Par l'absurde, supposons que $\text{Ind}(f, C_p) \leq 0$. D'après le Lemme 4.2, il existe alors au moins un changement d'orientation en un des sommets S_k de ∂C_p .

Alors l'une des composantes C_l adjacente à C_p en S_k vérifie $\omega(C_l, \Gamma) < \omega(C_p, \Gamma)$ et l'autre C_m vérifie $\omega(C_m, \Gamma) > \omega(C_p, \Gamma)$ (voir Figure 4). En effet, les valeurs de $\omega(C_l, \Gamma)$ et $\omega(C_m, \Gamma)$ ne dépendent que de l'orientation avec laquelle on franchit Γ pour passer de C_p à C_l et C_m . Il existe donc $q \in \{l, m\}$ ($q \neq p, \infty$) tel que :

$$|\omega(C_q, \Gamma)| > |\omega(C_p, \Gamma)| > 0$$

ce qui contredit l'hypothèse faite sur p . □

RÉFÉRENCES

- [1] P. Boyland. Notes on dynamics of surface homeomorphisms : lectures by P. Boyland and J. Franks. notes by C. Carroll, J. Guaschi and T. Hall, August 1989, Warwick, pp. 1–48, 1989.
- [2] M. Brown. Fixed points for orientation preserving homeomorphisms of the plane which interchange two points. *Pacific J. Math.*, 143(1) :37–41, 1990.
- [3] J. Franks. Geodesics on S^2 and periodic points of annulus homeomorphisms. *Invent. Math.*, 108(2) :403–418, 1992.
- [4] J.-M. Gambaudo. Periodic orbits and fixed points of a C^1 orientation-preserving embedding of D^2 . *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 108(2) :307–310, 1990.
- [5] J. Guaschi. Fixed points and linking with periodic orbits of surface diffeomorphisms and a generalization of brouwer's lemma. Preprint, Warwick Univeristy, 1990.
- [6] B. Kolev. Point fixe lié à une orbite périodique d'un difféomorphisme de R^2 . *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 310(12) :831–833, 1990.

UNIVERSITÉ DE BOURGOGNE, DÉPT. DE MATHÉMATIQUES, B.P. 138, 21004 DIJON CEDEX, FRANCE.

E-mail address: bonatti@satie.u-bourgogne.fr

CMI, 39, RUE F. JOLIOT-CURIE, 13453 MARSEILLE CEDEX 13, FRANCE

E-mail address: kolev@cmi.univ-mrs.fr